

Wstęp do algebraicznej i różniczkowej teorii Galois

Celem wykładu jest zapoznanie doktorantów z pojęciami i głównymi wynikami teorii Galois: algebraicznej i różniczkowej.

Proponowany plan wykładu:

1. Elementy teorii grup i pierścieni – przypomnienie: grupa, podgrupa, rząd grupy, warstwa, grupy cykliczne, automorfizm, dzielnik normalny, homomorfizmy grup, grupy ilorazowe, grupy permutacji, pierścien, homomorfizmy i izomorfizmy pierścieni, ideał pierścienia, ciało, podciało, rozszerzenie ciała, ciało ilorazowe.
2. Rozszerzenia algebraiczne: rozszerzenie ciała jako przestrzeń liniowa, rozszerzenie algebraiczne, baza i stopień rozszerzenia, ciało rozkładu wielomianów, rozszerzenia normalne, element pierwotny rozszerzenia.
3. Algebraiczna grupa Galois: automorfizmy ciał, automorfizm ciała stały na podciele, grupa Galois rozszerzenia, przykłady, własności, rozszerzenia Galois, odpowiedniość pomiędzy podgrupami grupy Galois a podciałami ciała, zasadnicze twierdzenie teorii Galois.
4. Zastosowanie teorii Galois do równań algebraicznych: ciała cykliczne, pierwiastniki, rozszerzenie ciał pierwiastnikowe, rozwiązalność równania wielomianowego przez pierwiastniki, grupy rozwiązalne, rozwiązalność równania wielomianowego a rozwiązalność grupy Galois, przykłady nierozwiązywalnych przez pierwiastniki równań wielomianowych, twierdzenie Abela.
5. Konstrukcje geometryczne za pomocą cyrkla i linijki: konstruowalność punktu przy pomocy konstrukcji klasycznej, rozszerzenia konstruowalne, niewykonalność pewnych konstrukcji klasycznych.
6. Równania różniczkowe liniowe o niestałych współczynnikach: derywacje, ciała różniczkowe, ciało stałych, rozszerzenie różniczkowe ciała różniczkowego, własności rozwiązań równań różniczkowych liniowych, rozszerzenie Picarda-Vessiot.
7. Różniczkowa grupa Galois, definicja, własności, przykłady różniczkowych grup Galois, różniczkowa grupa Galois jako grupa algebraiczna
8. Rozwiązalność równań różniczkowych liniowych: funkcje klasy Liouville'a, rozszerzenie Liouville'a, rozwiązalność w funkcjach klasy Liouville'a, związek między rozwiązalnością równania w funkcjach klasy Liouville'a z rozwiązalnością różniczkowej grupy Galois.
9. Grupa Galois równania różniczkowego drugiego rzędu o współczynnikach wymiernych: postać zredukowana równania, algebraiczne podgrupy grupy $SL(2, \mathbb{C})$, algorytm Kovacica
10. Lokalne i globalne grupy Galois: rozwiązania lokalne wokół osobliwości, wykładniki charakterystyczne i uogólnione wykładniki, formalna lokalna monodromia, formalna lokalna grupa Galois, zjawisko Stokesa, connection problem.

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. Bryński, *Elementy teorii Galois*, Wydawnictwo „Alfa”, Warszawa, 1985
- [2] A. Mostowski, M. Stark, *Algebra wyższa, część III*, PWN, Warszawa, 1967
- [3] I. Stewart, *Galois theory*, 4th edition, CRC Press, 2015
- [4] D.A. Cox, *Galois theory*, Wiley-Interscience, 2004
- [5] M. Ayad, *Theorie de Galois, 122 exercices corriges, niveau I*, Ellipses, Paris, 1997
- [6] F. Beukers, Differential Galois theory, in *From number theory to physics* (Les Houches, 1989), 413–439, Springer, Berlin, 1992
- [7] M.F. Singer, ‘An outline of differential Galois theory’, In: *Computer Algebra and Differential Equations*, Academic Press, London, pp. 3–57, 1990.

- [8] M.F. Singer, *Formal Solutions of Differential Equations*. J. Symbolic Computation, vol. 10, 1990, 59–94.
- [9] I. Kaplansky, *An Introduction to Differential Algebra*, 2nd edn, Hermann, Paris; Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1251, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, No. V, 1976
- [10] A.R. Magid. Lectures on differential Galois theory. University Lecture Series, vol. 7. Providence, RI: American Mathematical Society; 1994.
- [11] M. van der Put, M.F. Singer, *Galois theory of linear differential equations*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Fundamental Principles of Mathematical Sciences, vol. 328. Berlin: Springer-verlag; 2003.